



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

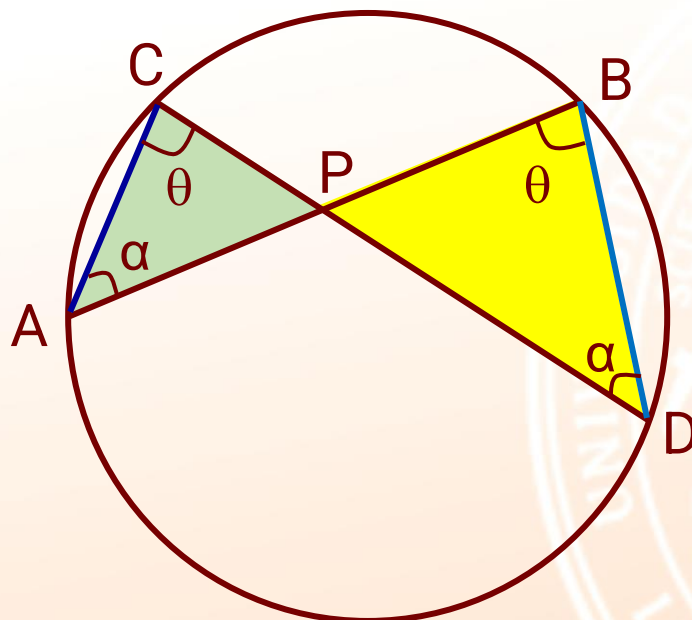
**RELACIONES MÉTRICAS
EN LA CIRCUNFERENCIA**

**CICLO
2024-1**



TEOREMA DE LAS CUERDAS

Si en una circunferencia se trazan dos cuerdas secantes entonces los productos de las longitudes de los segmentos determinados en cada cuerda son iguales.



Demostración

Se traza $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$, tal que:

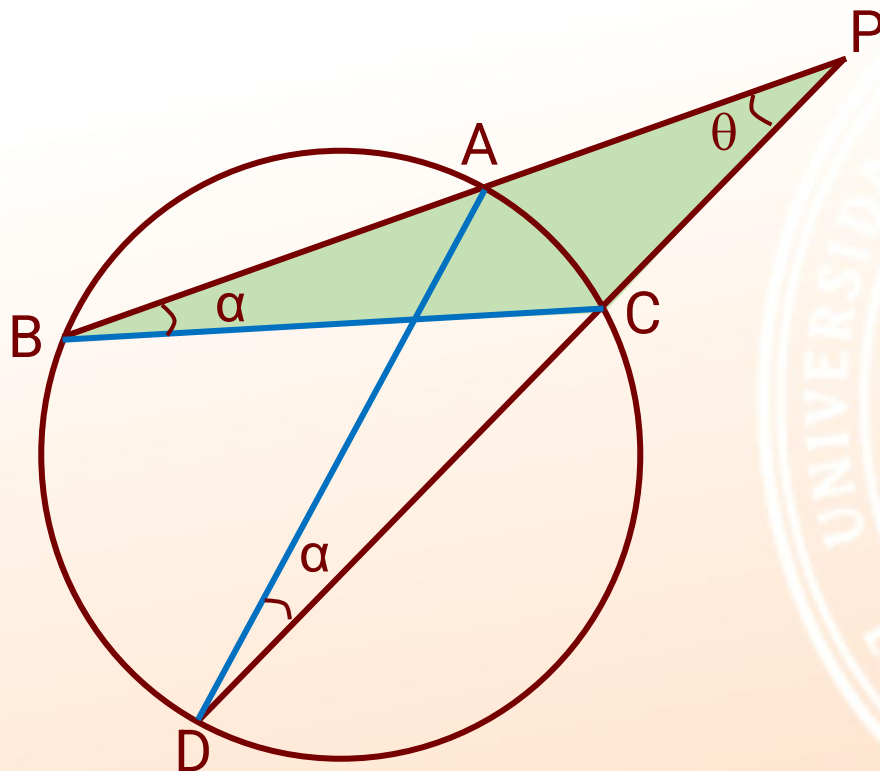
$$\triangle CAP \sim \triangle BDP:$$

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

$$(PA)(PB) = (PC)(PD)$$

TEOREMA DE LAS SECANTES

Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos rectas secantes, entonces los productos de las longitudes de los segmentos secantes determinados y los segmentos externos correspondientes son iguales.



Demostración

Se traza $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$, tal que:

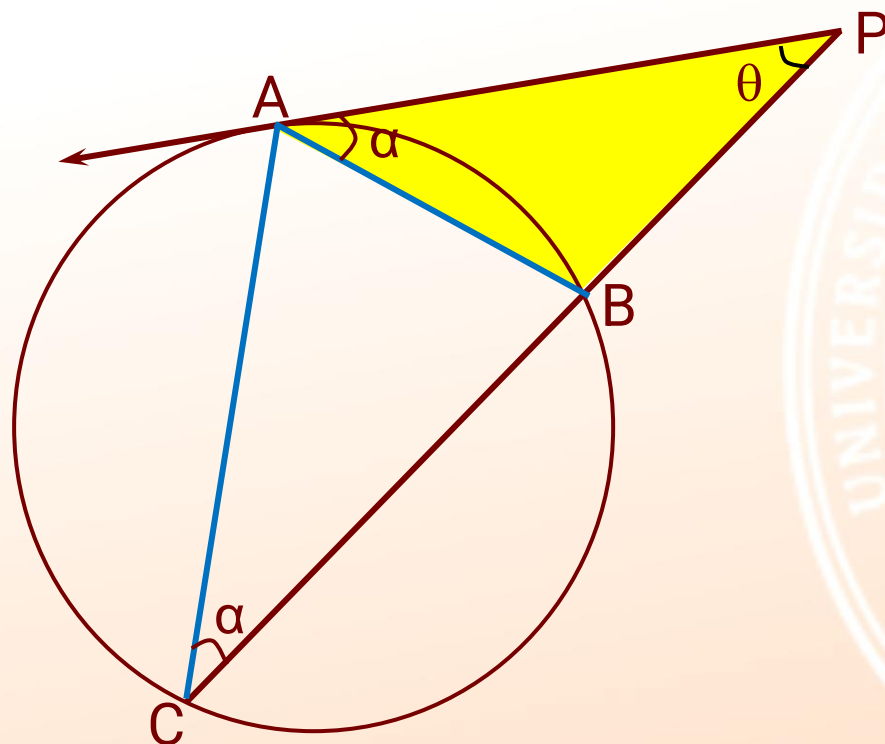
$$\triangle CBP \sim \triangle ADP:$$

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA}$$

$$(PB)(PA) = (PD)(PC)$$

TEOREMA DE LA TANGENTE

Si por un punto exterior a una circunferencia se traza una recta tangente y una recta secante, entonces el segmento tangente determinado es media proporcional entre el segmento secante y su segmento externo correspondiente.



Demostración

Se traza $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$, tal que:

$$\triangle CAP \sim \triangle ABP:$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA}$$

$$(PA)^2 = (PB)(PC)$$

EJERCICIO 01

Por el punto B exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{BA}$ y la secante $\overline{BE}$ que interseca a la circunferencia en C y D (B - C - D), además se traza la secante EFG tal que F y G están en la circunferencia, $AB = 6$ m, $BC = 4$ m, $DE = 3$ m y $EF = 2$ m. Calcule (en m) GF.

A) 8

D) 11

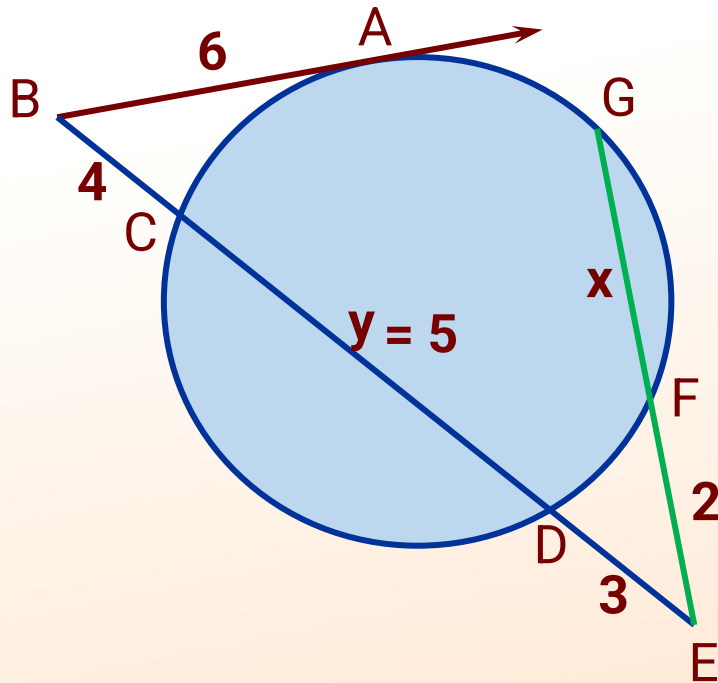
B) 9

E) 12

C) 10

RESOLUCIÓN 01

Por el punto B exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{BA}$ y la secante $\overline{BE}$ que interseca a la circunferencia en C y D (B - C - D), además se traza la secante EFG tal que F y G están en la circunferencia, AB = 6 m, BC = 4 m, DE = 3 m y EF = 2 m. Calcule (en m) GF.



Por teorema de las tangentes:

$$6^2 = (4 + y)(4)$$

$$5 = y$$

Por teorema de las secantes:

$$(EC)(ED) = (EG)(EF)$$

$$(3 + 5)(3) = (x + 2)(2)$$

$$10 = x$$

Clave: C

EJERCICIO 02

En una circunferencia de centro O , el punto B se ubica en la cuerda $\overline{AC}$ de modo que $AB = 2$ m, $BC = 5$ m. Si el radio de la circunferencia mide 6 m, calcule (en m) OB .

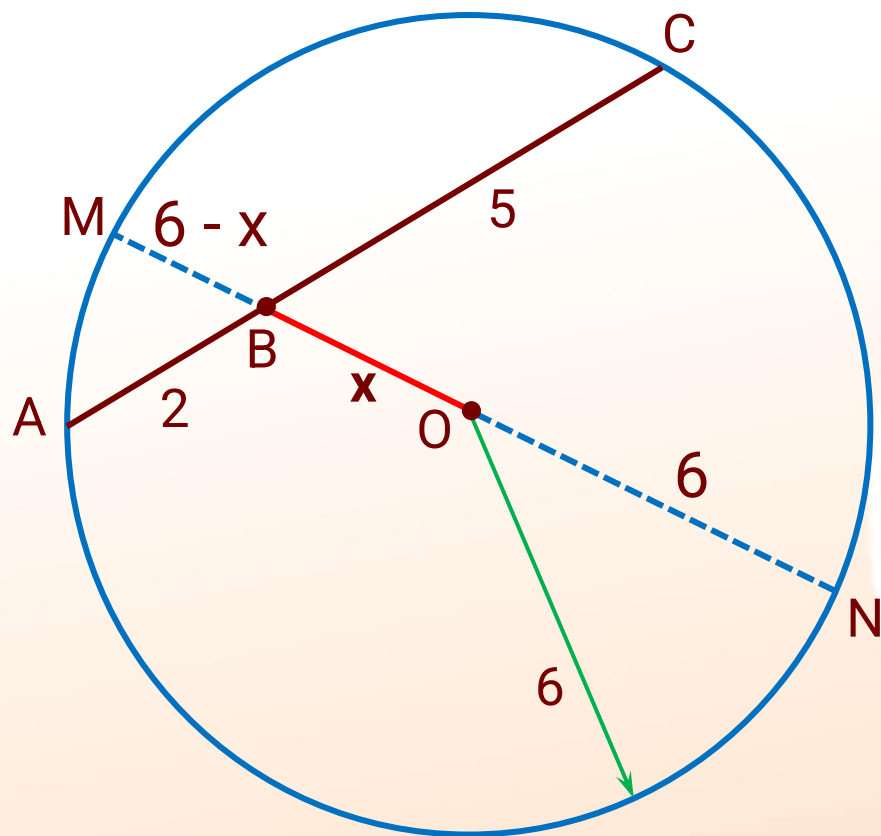
- A) $\sqrt{23}$
D) $\sqrt{26}$

- B) $2\sqrt{6}$
E) $3\sqrt{3}$

- C) 5

RESOLUCION 02

En una circunferencia de centro O , el punto B se ubica en la cuerda $\overline{AC}$ de modo que $AB = 2$ m, $BC = 5$ m. Si el radio de la circunferencia mide 6 m, calcule (en m) OB .



Se traza una recta por $\overline{BO}$ hasta M y N

Tal que $ON = 6$ y $MB = 6 - x$

Por teorema de las cuerdas:

$$(MB)(BN) = (AB)(BC)$$

$$(6 - x)(6 + x) = (2)(5)$$

$$36 - (x)^2 = (2)(5)$$

$$\sqrt{26} = x$$

Clave: D

EJERCICIO 03

Dos circunferencias son secantes en D y C. La prolongación de $\overline{DC}$ interseca a la tangente común exterior $\overline{AB}$ en P, tal que $PC = CD$. Calcule $\frac{AB}{CD}$.

A) 2

D) $\sqrt{2}$

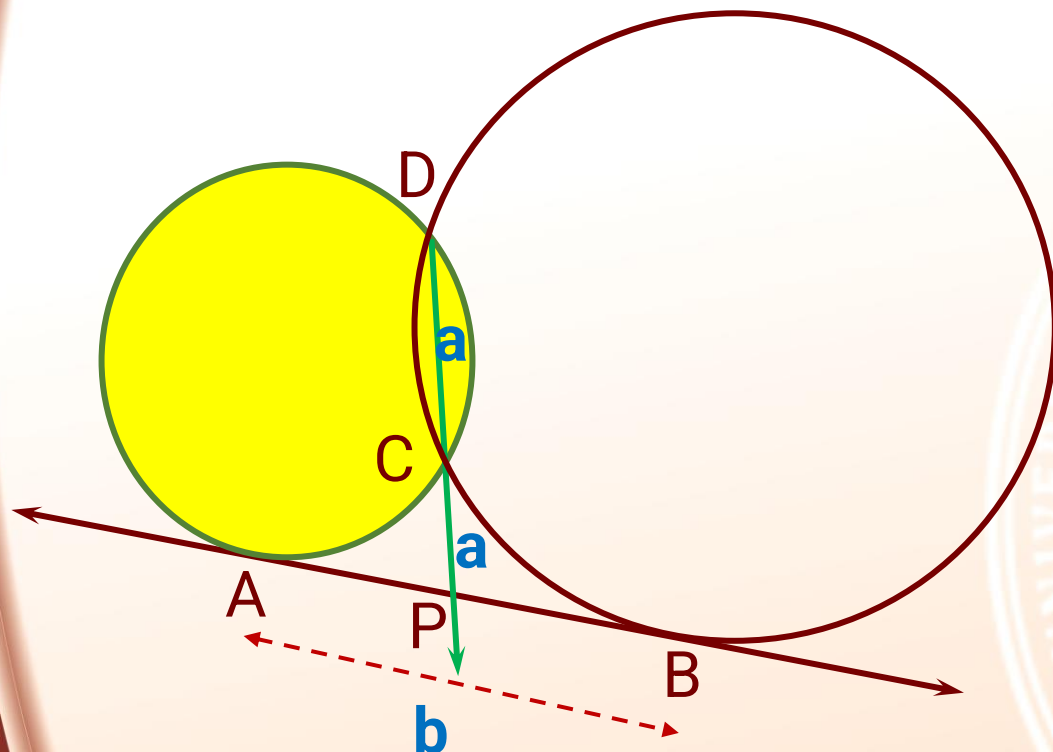
B) $\sqrt{3}$

E) $2\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{3}$

RESOLUCION 03

Dos circunferencias son secantes en D y C. La prolongación de $\overline{DC}$ interseca a la tangente común exterior $\overline{AB}$ en P, tal que $PC = CD$.
Calcule $\frac{AB}{CD}$.



$$x = \frac{AB}{CD} = \frac{b}{a}$$

Por teorema de las tangentes:

$$(AP)^2 = (PD)(PC) = (2a)(a) = 2a^2$$

$$(PB)^2 = (PD)(PC) = (2a)(a) = 2a^2$$

$$\text{Igualando: } (AP)^2 = (PB)^2$$

$$AP = PB = b/2$$

$$\text{luego: } (b/2)^2 = 2a^2$$

$$b^2/4 = 2a^2 \rightarrow x = \frac{b}{a} = 2\sqrt{2}$$

Clave: E

EJERCICIO 04

Un trapecio $ABCD$ de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ ($BC < AD$) está inscrito en una circunferencia. La cuerda $\overline{CQ}$ es paralela al lado $\overline{BA}$ e interseca a $\overline{AD}$ en E . La cuerda $\overline{BP}$ pasa por E . Si $BE = 8$ m y $BD = 12$ m, calcule (en m) EP .

A) 3
D) 6

B) 4
E) 7

C) 5

RESOLUCION 04

Un trapezio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ ($BC < AD$) está inscrito en una circunferencia. La cuerda $\overline{CQ}$ es paralela al lado $\overline{BA}$ y corta a $\overline{AD}$ en E. La cuerda $\overline{BP}$ pasa por E. Si $BE = 8$ m y $BD = 12$ m, calcule (en m) EP.

Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ se cumple: $AB = CD$

ABCD es trapezio isósceles:

$$BD = AC = 12$$

En el paralelogramo ABCE:

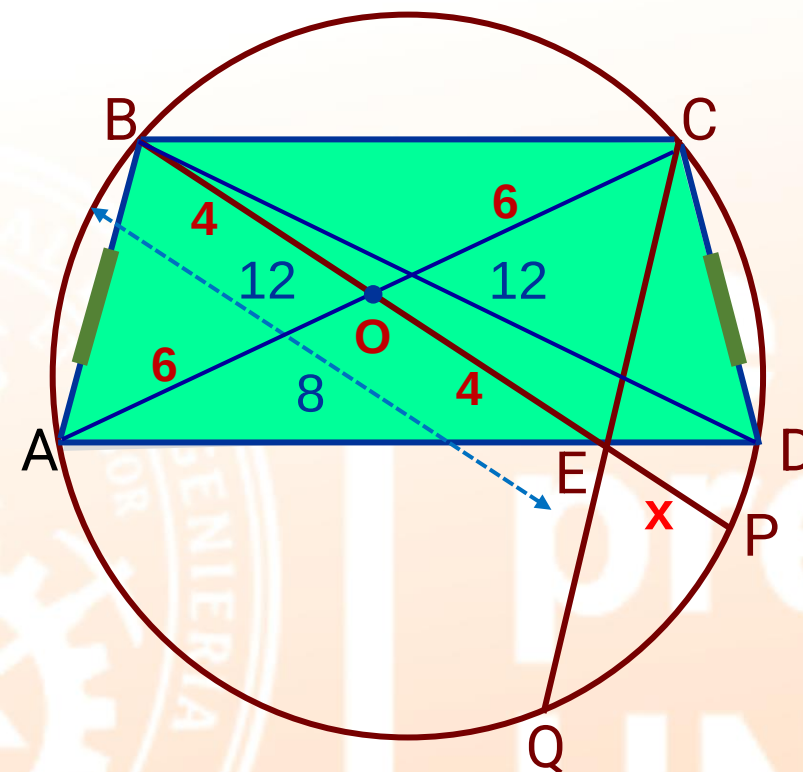
$$AO = CO = 6, BO = OE = 4$$

Por teorema de cuerdas:

$$(BO)(OP) = (AO)(OC)$$

$$(4)(4 + x) = (6)(6)$$

$$\rightarrow \boxed{x = 5}$$



Clave: C

EJERCICIO 05

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en M y P, respectivamente. El punto Q se ubica $\overline{PC}$ de modo que es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{QM}$ interseca a la circunferencia en N tal que $AB = 8$ m, $BC = 12$ m y $MQ = 4$ m. Calcule (en m) QN.

A) 0,5
D) 1,2

B) 0,8
E) 1,4

C) 1,0

Por teorema de las tangentes:

$$BT = BM \Rightarrow 8 - (b - y) = 12 - (b + y)$$

$$2y = 12 - 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Por teorema de las tangentes:

$$(y)^2 = (x + 4)(x)$$

$$0 = x^2 + 4x - 4$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \Rightarrow x = 2(\sqrt{2} - 1)$$

x= 0,8

Clave: B



EJERCICIO 06

Interiormente a una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O , se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{OB}$. La cuerda $\overline{AE}$ de la primera semicircunferencia interseca a la otra semicircunferencia en C y D (C en $\overline{AD}$). Si $CD = 4$ m y $DE = 1$ m, calcule (en m) BC .

A) $4\sqrt{2}$

D) $\sqrt{35}$

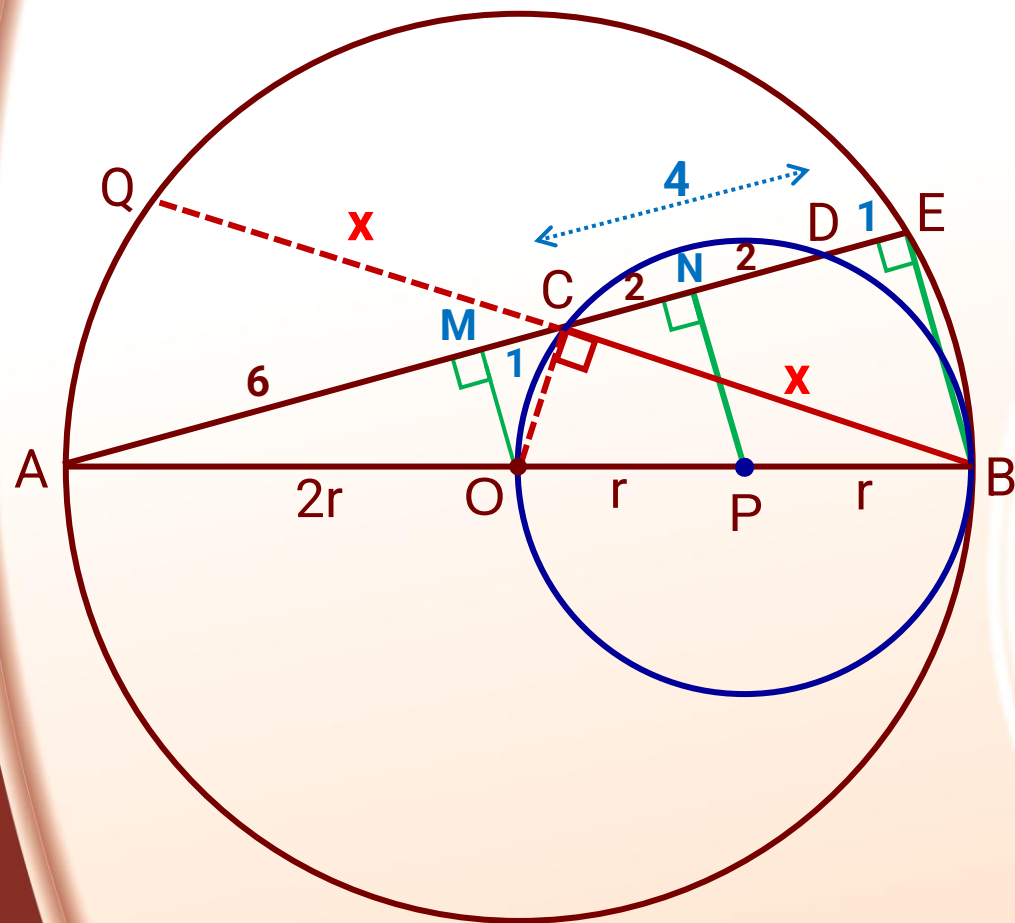
B) $\sqrt{33}$

E) 6

C) $\sqrt{34}$

RESOLUCION 06

Interiormente a una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O , se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{OB}$. La cuerda $\overline{AE}$ de la primera semicircunferencia intersecta a la otra semicircunferencia en C y D (C en $\overline{AD}$). Si $CD = 4$ m y $DE = 1$ m, calcule (en m) BC .



Se traza $\overline{BE} \parallel \overline{PN} \parallel \overline{OM}$, $m\angle AEB = 90$

En la cuerda $\overline{CD}$, $CN = ND = 2$,

Trapezio $OMEB$: $MN = NE = 3$ y $MC = 1$

Además: $AM = ME = 6$

Se prolonga $\overline{BC}$ hasta Q y se traza $\overline{OC}$

$m\angle OCB = 90$ y $QC = CB = x$

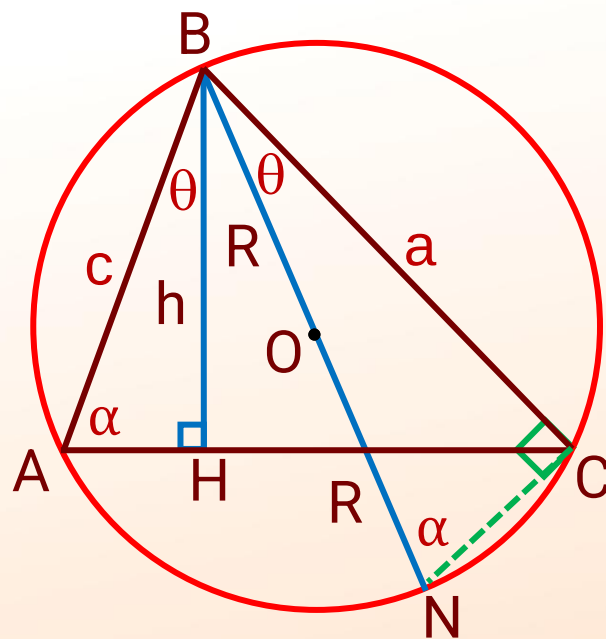
Por T. de cuerdas: $(QC)(CB) = (AC)(CE)$

$$\rightarrow (x)(x) = (7)(5) \rightarrow x = \sqrt{35}$$

Clave: D

TEOREMA DEL TRIÁNGULO INSCRITO

En un triángulo inscrito en una circunferencia, el producto de longitudes de dos lados es igual al producto de la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo y la longitud de la altura relativa al tercer lado.



Demostración:

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son segmentos isogonales del ángulo ABC, por lo tanto:

$$(AB)(BC) = (2R)(BH)$$

$$c a = 2R h$$

TEOREMA DE PTOLOMEO

Si un cuadrilátero es inscrito o inscriptible a una circunferencia, entonces el producto de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos.

Demostración:

Se traza $\overline{BE}$, tal que: $m\angle ABE = m\angle DBC = \alpha$

$\triangle ABE \sim \triangle DBC$:

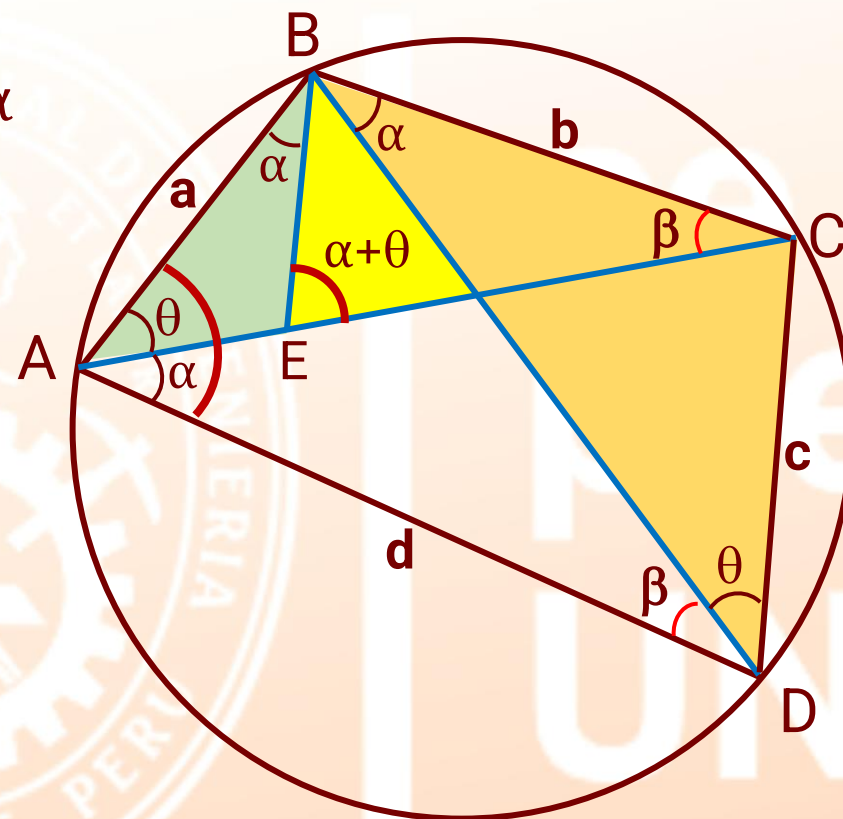
$$\frac{a}{BD} = \frac{AE}{c} \quad \Rightarrow \quad a c = (\mathbf{BD})(AE)$$

$\triangle CBE \sim \triangle DBA$:

$$\frac{b}{BD} = \frac{EC}{d} \quad \Rightarrow \quad b d = (\mathbf{BD})(EC)$$

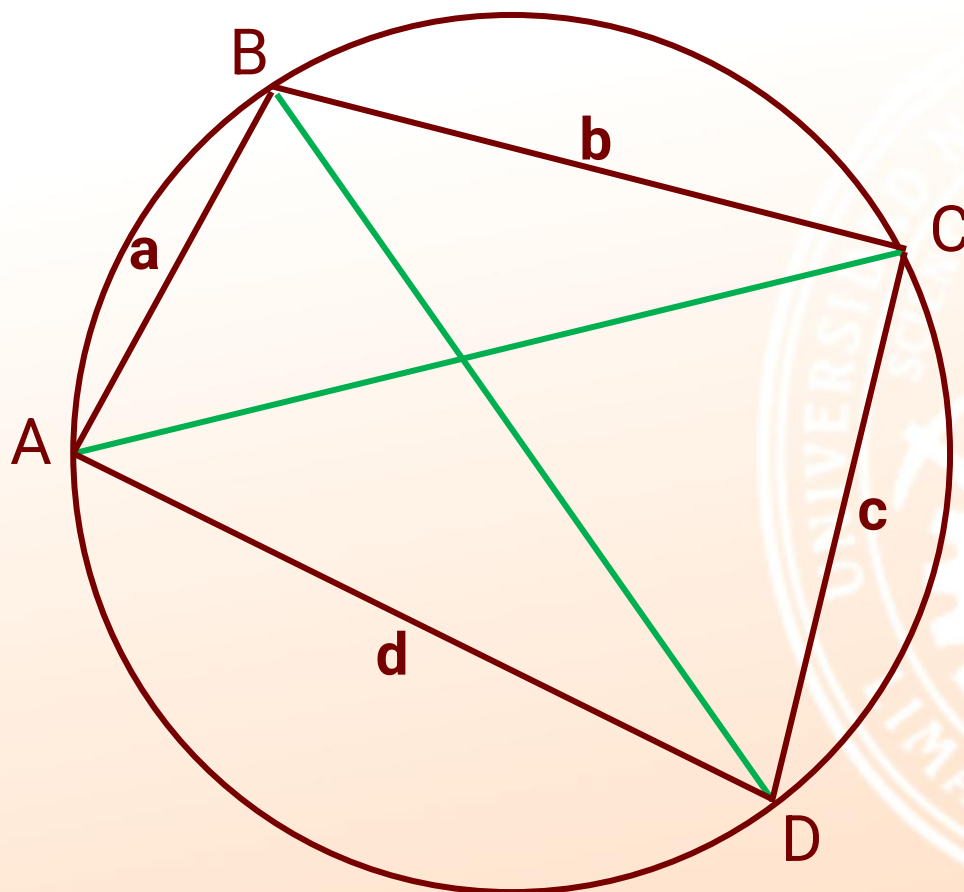
Sumando: $a c + b d = (\mathbf{BD})(AE + EC)$

$$(\mathbf{BD})(AC) = (a c) + (b d)$$



TEOREMA DE VIETTE

Si un cuadrilátero es inscrito o inscriptible en una circunferencia, entonces la razón de las longitudes de las diagonales es igual a la razón de las sumas de los productos de las longitudes de los lados concurrentes en los extremos de cada diagonal.



$$\frac{BD}{CA} = \frac{(a b) + (c d)}{(b c) + (a d)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: (a)(b) = 2R(h_1) \\ \triangle ADC: (c)(d) = 2R(h_2) \end{array} \right\} \text{Sumando:}$$

$$(a)(b) + (c)(d) = 2R(h_1 + h_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BCD: (b)(c) = 2R(h_3) \\ \triangle ABC: (a)(d) = 2R(h_4) \end{array} \right\} \text{Sumando:}$$

$$(b)(c) + (a)(d) = 2R(h_3 + h_4)$$

Se prolonga $\overline{BE}$ hasta P, tal que:

$$EP = FD = h_2$$

Se prolonga $\overline{AN}$ hasta Q, tal que:

$$NQ = MC = h_3$$

$$\triangle AQC \sim \triangle BPD:$$

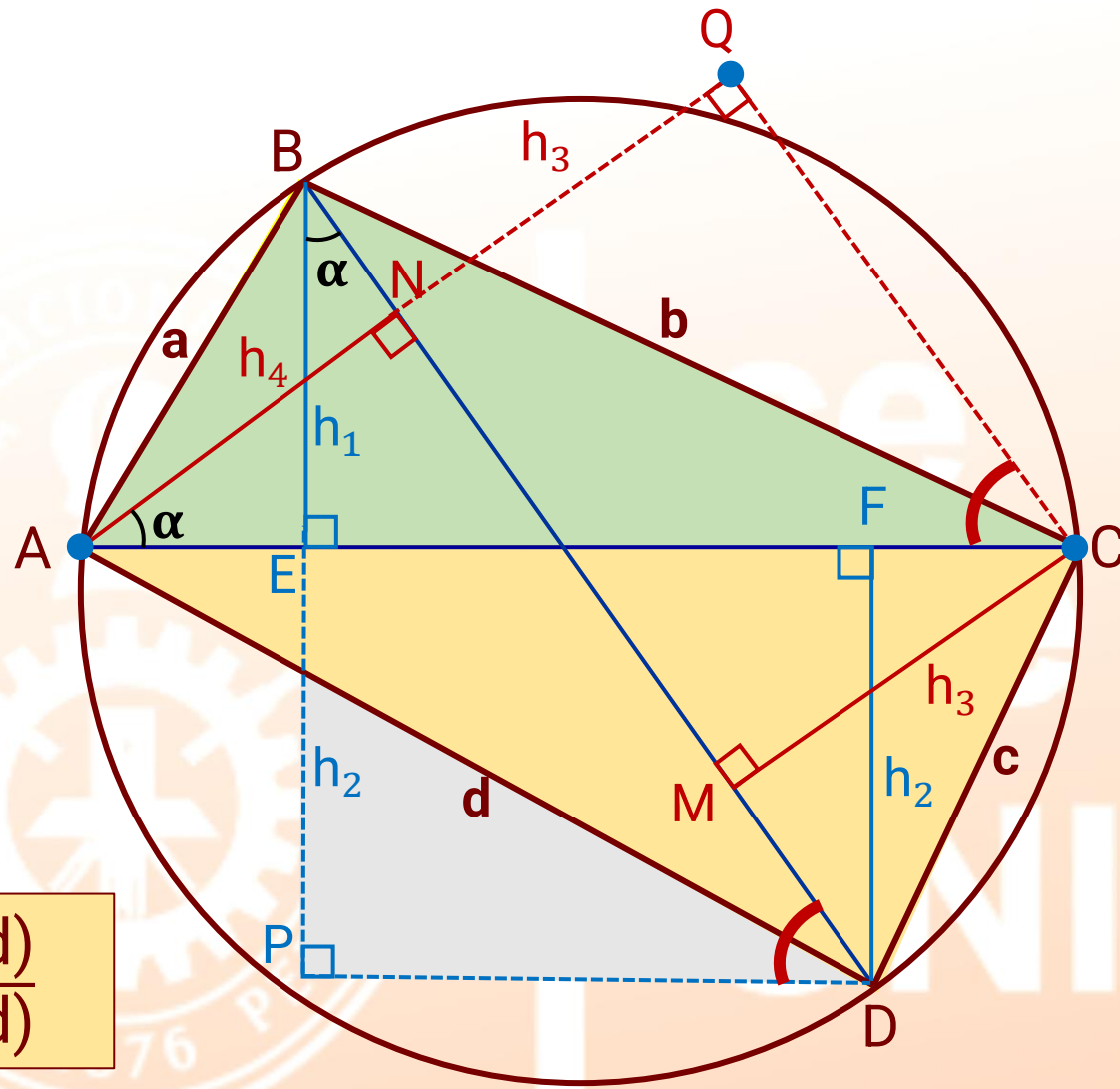
$$\frac{h_1 + h_2}{h_3 + h_4} = \frac{BD}{AC}$$



$$\frac{BD}{CA} = \frac{(a b) + (c d)}{(b c) + (a d)}$$

Demostración:

R: es el circunradio



EJERCICIO 07

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, P es un punto del radio $\overline{OT}$, D es un punto del arco TB y Q un punto del arco DB. Si $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, $m\angle PDO$ es igual a la medida del arco QB, $m\angle DPQ = 60^\circ$, $PD = 4$ m y $OP = 7$ m. Calcule PQ.

A) 14
D) 10

B) 13
E) 8

C) 11

EJERCICIO 08

Un cuadrado ABCD, está inscrito en una circunferencia y P es un punto del arco AB tal que $PA = a$, $PB = b$. Calcule la longitud de $\overline{PC}$.

A) $a + b$

D) $2a + b\sqrt{2}$

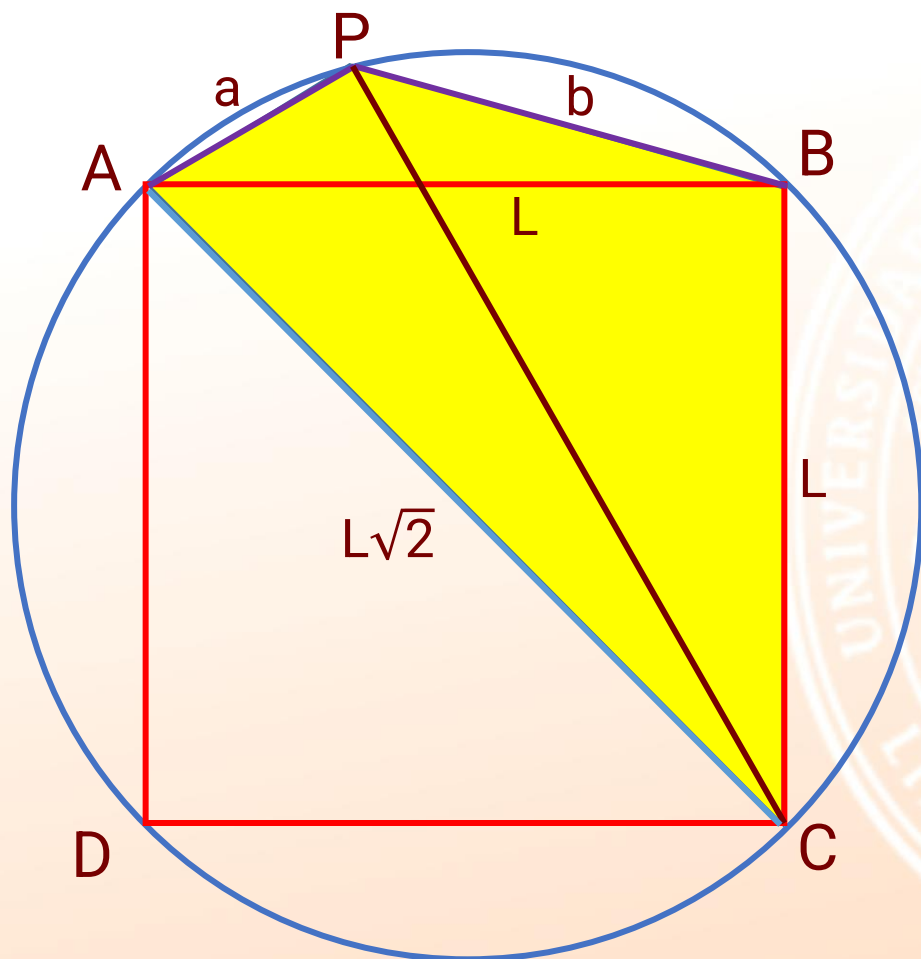
B) $a\sqrt{2} + b$

E) $a + b\sqrt{2}$

C) $2a - b\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN 08

Un cuadrado ABCD, está inscrito en una circunferencia y P es un punto del arco AB tal que $PA = a$, $PB = b$. Calcule la longitud de $\overline{PC}$.



En el cuadrilátero ABCD, se aplica el teorema de Ptolomeo

$$CP(L) = a(L) + b(L\sqrt{2})$$

Simplificando:

$$CP = a + b\sqrt{2}$$

Clave: E

EJERCICIO 09

En la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ se ubica un punto B para determinarse el triángulo ABC, se trazan: $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ y con diámetro $\overline{BE}$ una circunferencia tal que $(AC)(AE) = a u^2$ y $(AC)(CE) = b u^2$. Calcule el valor (en u^2) del producto de las longitudes de los radios.

A) $\frac{\sqrt{ab}}{4}$

D) $\frac{2\sqrt{ab}}{3}$

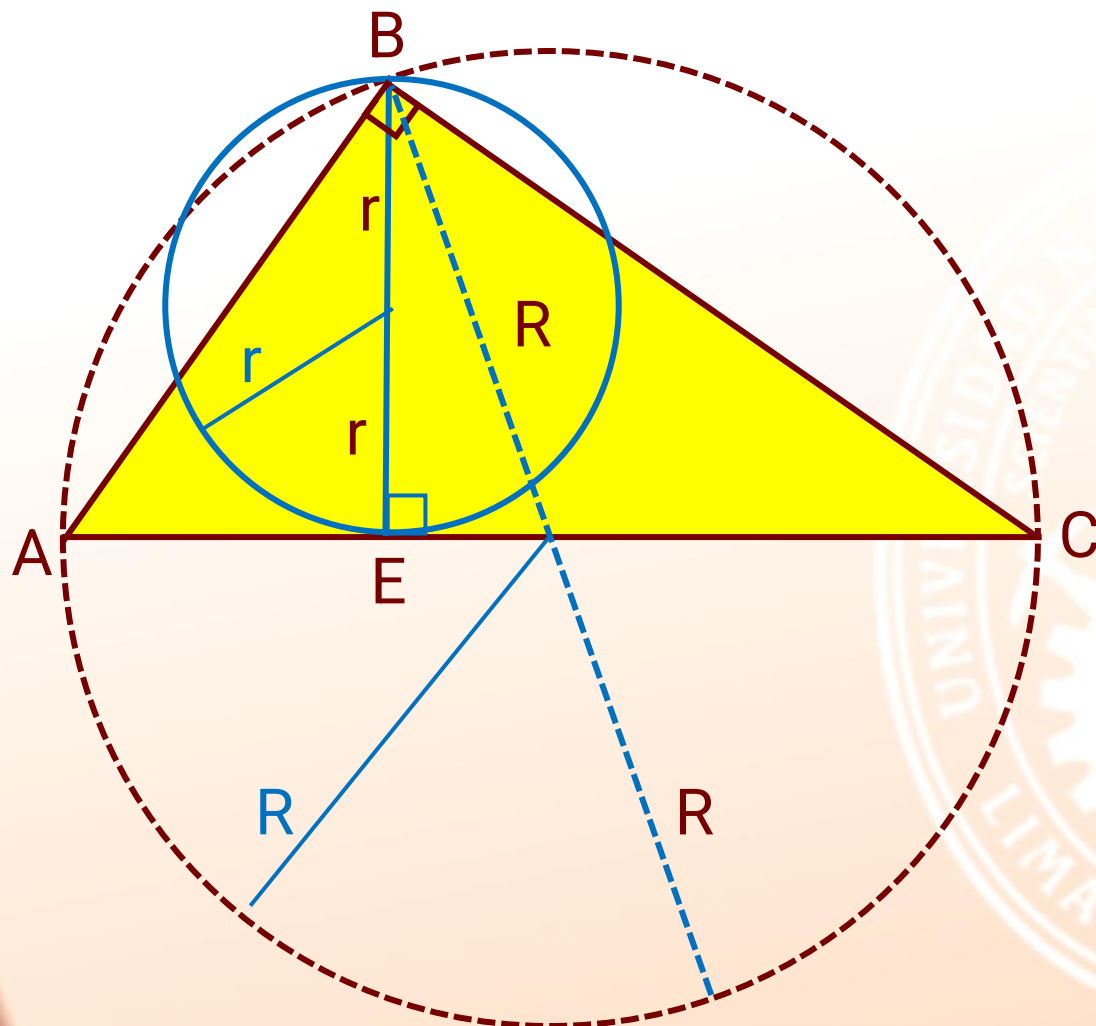
B) $\frac{\sqrt{ab}}{3}$

E) $\sqrt{ab}$

C) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

RESOLUCIÓN 09

Calcule $R r$



En la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ se ubica un punto B para determinar el triángulo ABC, se trazan: $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ y con diámetro $\overline{BE}$ una circunferencia tal que $(AC)(AE) = a u^2$ y $(AC)(CE) = b u^2$. Calcule el valor (en u^2) del producto de las longitudes de los radios.

$$m\angle ABC = 90$$

$$\triangle ABC: (AB)^2 = (AC)(AE) = a$$

$$(BC)^2 = (AC)(CE) = b$$

Multiplicando:

$$(\mathbf{AB \cdot BC})^2 = (AC)^2(AE)(CE) = ab$$

$$\text{Pero: } (\mathbf{AB})(\mathbf{BC}) = 2R(\mathbf{BE})$$

$$(2R \cdot 2r)^2 = ab$$

$$\mathbf{R r} = \frac{\sqrt{ab}}{4}$$

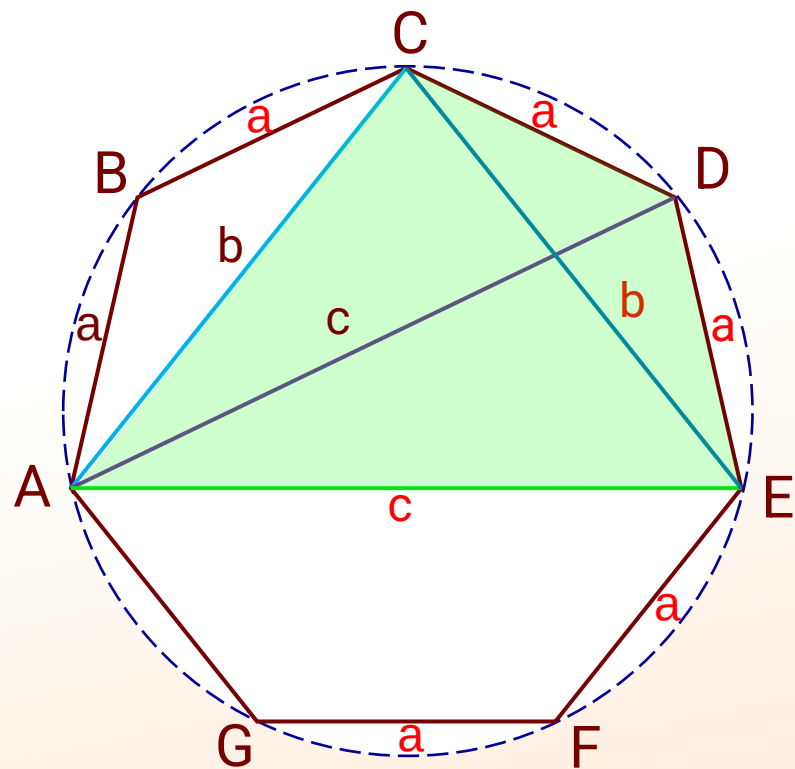
Clave: C

EJERCICIO 10

En un heptágono regular ABCDEFG, demuestre: $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$



DEMOSTRACIÓN 10



Se pide demostrar

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Se observa, los lados $AB = BC = CD = \dots = a$

$AC = CE = b$ y $AD = AE = c$

En el cuadrilátero ACDE, aplicamos el teorema de Ptolomeo

$$ab + ac = bc \quad \longrightarrow \quad a(b+c) = bc$$

$$\frac{b}{bc} + \frac{c}{bc} = \frac{1}{a}$$

Luego simplificando tenemos:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

lqgd.

EJERCICIO 11

En un triángulo ABC, se ubica el incentro I y su circuncentro O. Si $m\angle AIO = 90$, $AB = a$ m y $AC = b$ m, entonces la distancia (en m) del vértice A al incentro I es

A) $\frac{2ab}{a+b}$

D) $\frac{\sqrt{3ab}}{3}$

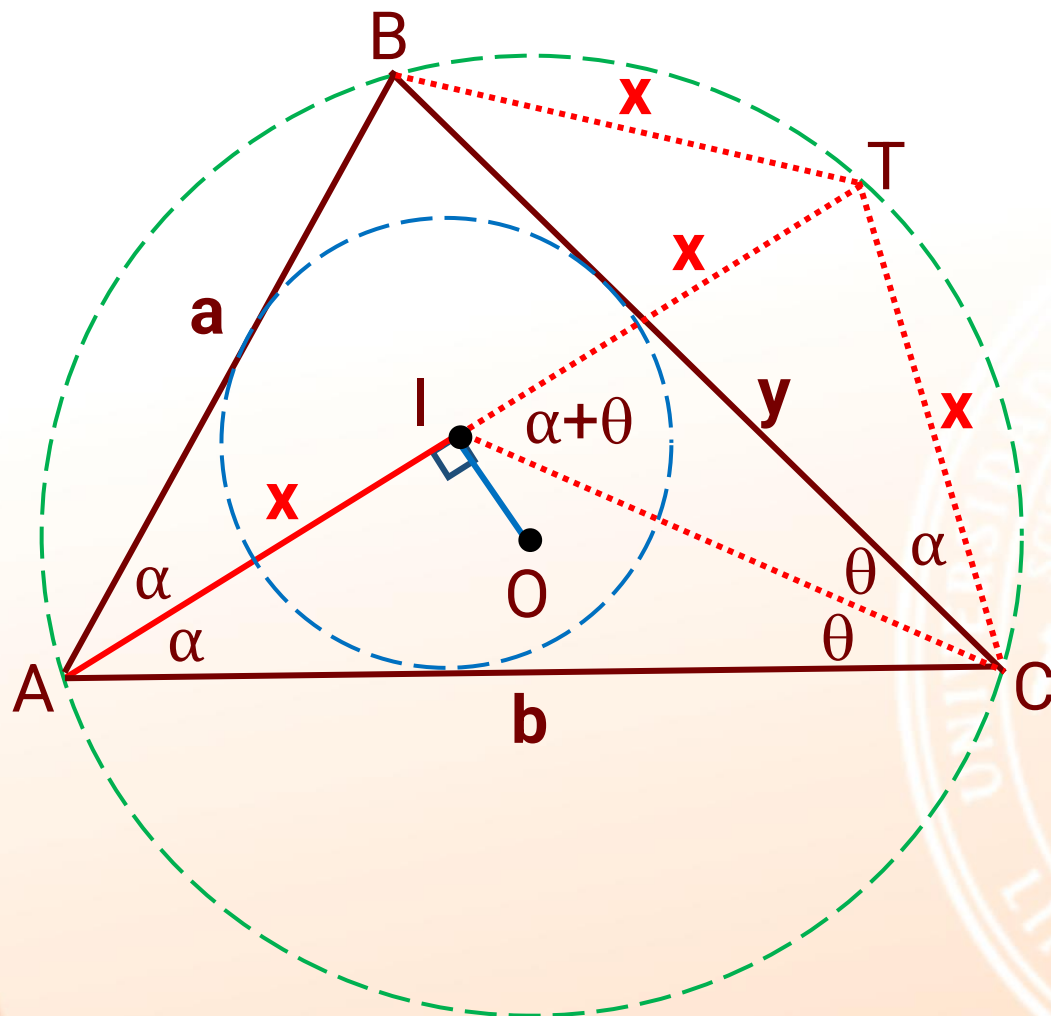
B) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

E) $\frac{a^2+b^2}{b}$

C) $\frac{a+b}{2}$

RESOLUCIÓN 11

En un triángulo ABC, se ubica el incentro I y su circuncentro O. Si $m\angle AIO = 90^\circ$, $AB = a$ m y $AC = b$ m, entonces la distancia (en m) del vértice A al incentro I es



Por $\angle$ inscrito: $m\angle BAT = m\angle BCT = \alpha$

$\triangle AIC$: Por $\angle$ exterior: $\angle TIC = \alpha + \theta$

$\triangle ITC$: Isósceles: $IT = TC = BT = x$

En ABTC (teorema de Ptolomeo):

$$ax + bx = 2xy \rightarrow y = \frac{a+b}{2}$$

Por el teorema de Viette:

$$\frac{2x}{y} = \frac{x^2 + ab}{ax + bx} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3ab}}{3}$$

Clave: C

EJERCICIO 12

Se tiene dos semicircunferencias concéntricas de centro O y diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Se trazan la cuerda $\overline{EF}$ que es tangente a la semicircunferencia menor en T y la cuerda $\overline{EP}$, P en el arco EF . Si $AO = 25\text{ u}$, $CO = 15\text{ u}$ y $EP = 14\text{ u}$. Calcule la distancia (en u) de T al punto medio de la cuerda $\overline{EP}$

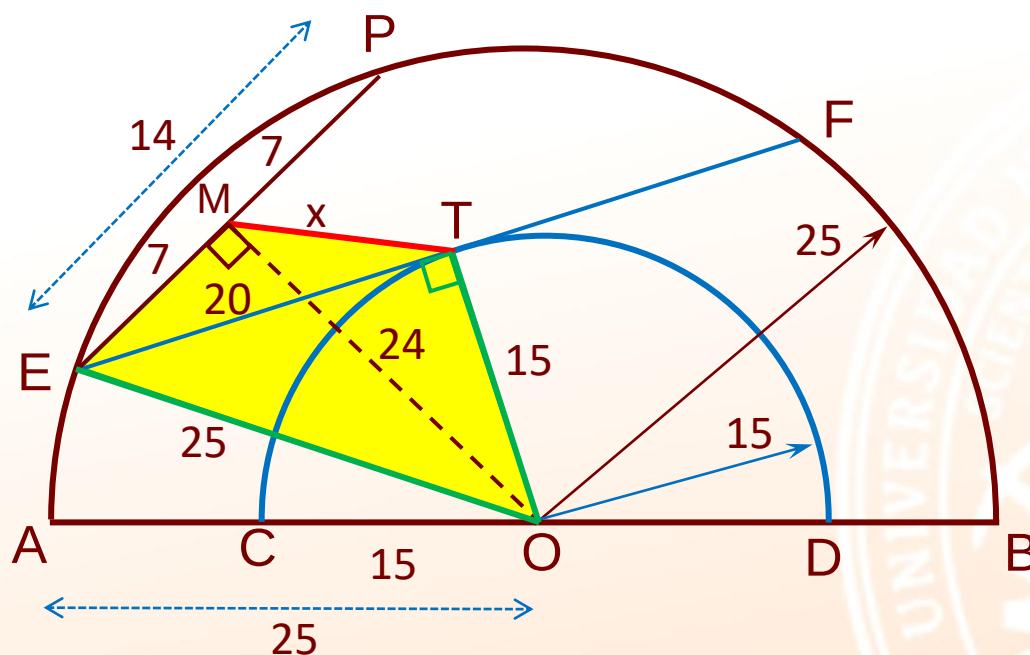
A) 10
D) 7

B) 15
E) 12

C) 20

RESOLUCIÓN 12

Se tiene dos semicircunferencias concéntricas de centro O y diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Se trazan la cuerda $\overline{EF}$ que es tangente a la semicircunferencia menor en T y la cuerda $\overline{EP}$, P en el arco EF . Si $AO = 25\text{ u}$, $CO = 15\text{ u}$ y $EP = 14\text{ u}$. Calcule la distancia (en u) de T al punto medio de la cuerda $\overline{EP}$



$$\triangle ETO: ET = 20$$

$$\triangle EMO: OM = 24$$

$\triangle EMTO$: inscriptible
Teorema de Ptolomeo

$$(25)x + (7)(15) = (20)(24)$$

$$x = 15$$

Clave: B



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI